Hatványösszegekkel kapcsolatos újabb diofantikus eredmények

Bazsó András

Számelmélet Szeminárium
Debrecen, 2023. március 3.

Az $S_k(n)$ hatványösszeg.

$$S_k(n) := 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$$

Az $S_k(n)$ hatványösszeg.

$$S_k(n) := 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$$

Jól ismert az alábbi kapcsolat a Bernoulli polinomokkal:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(n) - B_{k+1}\right),$$

ahol a $B_k(x)$ polinomokat az alábbi generátorfüggvénnyel definiálhatjuk:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{z^k}{k!} \qquad (|z| < 2\pi),$$

továbbá $B_k := B_k(0)$ a k-adik Bernoulli szám.

Az $S_k(n)$ hatványösszeg.

$$S_k(n) := 1^k + 2^k + \ldots + (n-1)^k$$

Jól ismert az alábbi kapcsolat a Bernoulli polinomokkal:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(n) - B_{k+1}\right),$$

ahol a $B_k(x)$ polinomokat az alábbi generátorfüggvénnyel definiálhatjuk:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{z^k}{k!} \qquad (|z| < 2\pi),$$

továbbá $B_k := B_k(0)$ a k-adik Bernoulli szám.
Az $S_k(n)$ hatványösszeg így kiterjeszthető az

$$\mathrm{S}_k(x) = \frac{1}{k+1}\left(B_{k+1}(x) - B_{k+1}\right).$$

polinommá.

$S_k(x)$ hatványértékei

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül?

$S_k(x)$ hatványértékei

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.

$S_k(x)$ hatványértékei

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.
Schäffer (1956): ha $(k, n) \notin \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$, akkor az

$$S_k(x) = y^n \tag{1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
Schäffer-sejtés: (1)-nek $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ az egyetlen nemtriviális megoldása, ha (k, n) nincs a fenti halmazban.

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.
Schäffer (1956): ha $(k, n) \notin \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$, akkor az

$$S_k(x) = y^n \tag{1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
Schäffer-sejtés: (1)-nek $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ az egyetlen nemtriviális megoldása, ha (k, n) nincs a fenti halmazban.
Győry, Tijdeman és Voorhoeve (1980): effektív végességi tétel (1)-ben x, y, n-re.

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.
Schäffer (1956): ha $(k, n) \notin \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$, akkor az

$$S_k(x) = y^n \tag{1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
Schäffer-sejtés: (1)-nek $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ az egyetlen nemtriviális megoldása, ha (k, n) nincs a fenti halmazban.
Győry, Tijdeman és Voorhoeve (1980): effektív végességi tétel (1)-ben x, y, n-re.
Számos általánosítás: **Voorhoeve, Győry és Tijdeman** (1979); **Brindza** (1984); **Dilcher** (1986), **Urbanowicz** (1988, 1994, 1996)
...

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.
Schäffer (1956): ha $(k, n) \notin \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$, akkor az

$$S_k(x) = y^n \tag{1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
Schäffer-sejtés: (1)-nek $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ az egyetlen nemtriviális megoldása, ha (k, n) nincs a fenti halmazban.
Győry, Tijdeman és Voorhoeve (1980): effektív végességi tétel (1)-ben x, y, n-re.
Számos általánosítás: **Voorhoeve, Győry és Tijdeman** (1979); **Brindza** (1984); **Dilcher** (1986), **Urbanowicz** (1988, 1994, 1996)
...
Jacobson, Pintér és Walsh (2003): a Schäffer-sejtés $n = 2$ és $k \leq 58$ esetén

Lucas (1875): létezik-e az $S_k(x) = y^2$ egyenletnek egész megoldása az $(x, y) = (1, 1)$ és $(24, 70)$ párokon kívül? $\Leftarrow$ **Watson** (1918): Nem.
Schäffer (1956): ha $(k, n) \notin \{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (5, 2)\}$, akkor az

$$S_k(x) = y^n \tag{1}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
Schäffer-sejtés: (1)-nek $(k, n, x, y) = (2, 2, 24, 70)$ az egyetlen nemtriviális megoldása, ha (k, n) nincs a fenti halmazban.
Győry, Tijdeman és Voorhoeve (1980): effektív végességi tétel (1)-ben x, y, n-re.
Számos általánosítás: **Voorhoeve, Győry és Tijdeman** (1979); **Brindza** (1984); **Dilcher** (1986), **Urbanowicz** (1988, 1994, 1996) ...
Jacobson, Pintér és Walsh (2003): a Schäffer-sejtés $n = 2$ és $k \leq 58$ esetén
Bennett, Győry és Pintér (2004): a Schäffer-sejtés $n \geq 2$ és $k \leq 11$ esetén.

$S_k(x)$ egyenlő értékei és polinomértékek

Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy (2002):
Ha $\ell > k \geq 1$, akkor az

$$S_k(x) = S_\ell(y) \tag{2}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
+ Effektív végesség, ha $k \in \{1, 3\}$ és $k \neq \ell$.

$S_k(x)$ egyenlő értékei és polinomértékek

Bilu, Brindza, Kirschenhofer, Pintér és Tichy (2002):
Ha $\ell > k \geq 1$, akkor az

$$S_k(x) = S_\ell(y) \tag{2}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
+ Effektív végesség, ha $k \in \{1, 3\}$ és $k \neq \ell$.

Ha $k \geq 1, \ell \geq 2$, és $(k, \ell) \neq (1, 2)$, akkor az

$$S_k(x) = y\,(y+1)\,(y+2)\ldots(y+(\ell-1))\,. \tag{3}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)
+ Effektív végesség, ha $k \in \{1, 3\}$ vagy $\ell \in \{2, 4\}$.

Az (1) Schäffer-féle egyenlet és a (2), (3) egyenletek közös általánosítása az

$$S_k(x) = g(y) \tag{4}$$

egyenlet, ahol $g(x)$ egy racionális együtthatós tetszőleges polinom.

Az (1) Schäffer-féle egyenlet és a (2), (3) egyenletek közös általánosítása az

$$S_k(x) = g(y) \tag{4}$$

egyenlet, ahol $g(x)$ egy racionális együtthatós tetszőleges polinom.

Rakaczki (2004), **Kulkarni és Sury** (2007): megadták azon $k, g(x)$ párokat, amelyeken kívül (4)-nek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)

A $T_k(n)$ alternáló hatványösszeg.

$$T_k(n) := -1^k + 2^k - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)^k$$

A $T_k(n)$ alternáló hatványösszeg.

$$T_k(n) := -1^k + 2^k - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)^k$$

Szintén régóta ismert az alábbi kapcsolata az Euler polinomokkal:

$$T_k(n) = \frac{E_k(0) + (-1)^{n-1} E_k(n)}{2},$$

ahol az $E_k(x)$ polinomokat az alábbi generátorfüggvénnyel definiálhatjuk:

$$\frac{2e^{xt}}{e^t + 1} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m(x) \frac{t^m}{m!} \quad (|t| < \pi).$$

A $T_k(n)$ alternáló hatványösszeg.

$$T_k(n) := -1^k + 2^k - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)^k$$

Szintén régóta ismert az alábbi kapcsolata az Euler polinomokkal:

$$T_k(n) = \frac{E_k(0) + (-1)^{n-1}E_k(n)}{2},$$

ahol az $E_k(x)$ polinomokat az alábbi generátorfüggvénnyel definiálhatjuk:

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1} = \sum_{m=0}^{\infty} E_m(x)\frac{t^m}{m!} \quad (|t| < \pi).$$

A polinommá való kiterjesztés nem annyira triviális, mint az $S_k(n)$ összeg esetében.

Diofantikus eredmények az alternáló esetben

Kreso és Rakaczki (2013): tetszőleges $k \geq 7$ és legalább harmadfokú $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén meghatározták azon $k, g(x)$ párokat, amelyeken kívül a

$$-1^k + 2^k - \ldots + (-1)^{x-1}(x-1)^k = g(y) \tag{5}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)

Bennett (2011): $3 \leq k \leq 6$ esetén teljes megoldás az

$$1^k - 3^k + 5^k - \ldots + (4x-3)^k - (4x-1)^k = -y^n \tag{6}$$

egyenletre.

Általánosítások a $b, a+b, \ldots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

Tekintsük $n > 1$, és $a \neq 0, b$ relatív prím egészek esetén az

$$S_{a,b}^{k}(n) := b^k + (a+b)^k + (2a+b)^k + \ldots + (a(n-1)+b)^k ,$$

és

$$T_{a,b}^{k}(n) := b^k - (a+b)^k + (2a+b)^k - \ldots + (-1)^{n-1}(a(n-1)+b)^k$$

hatványösszegeket. Nyilván, $S_{1,0}^{k}(n) = S_k(n)$ és $T_{1,0}^{k}(n) = T_k(n)$.

Általánosítások a $b, a+b, \ldots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

Tekintsük $n>1$, és $a \neq 0, b$ relatív prím egészek esetén az

$$S_{a,b}^{k}(n) := b^k + (a+b)^k + (2a+b)^k + \ldots + (a(n-1)+b)^k ,$$

és

$$T_{a,b}^{k}(n) := b^k - (a+b)^k + (2a+b)^k - \ldots + (-1)^{n-1}(a(n-1)+b)^k$$

hatványösszegeket. Nyilván, $S_{1,0}^{k}(n) = S_k(n)$ és $T_{1,0}^{k}(n) = T_k(n)$.

Howard (1996):

$$S_{a,b}^{k}(n) = \frac{a^k}{k+1}\left(B_{k+1}\left(n+\frac{b}{a}\right) - B_{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)\right), \qquad (7)$$

$$T_{a,b}^{k}(n) = \frac{a^k}{2}\left(E_k\left(\frac{b}{a}\right) + (-1)^{n-1}E_k\left(n+\frac{b}{a}\right)\right). \qquad (8)$$

$$\Downarrow$$

Általánosítások a $b, a+b, \ldots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

Lehetséges polinomkiterjesztések:

$$\mathtt{S}^k_{a,b}(x) = \frac{a^k}{k+1}\left(B_{k+1}\left(x+\frac{b}{a}\right) - B_{k+1}\left(\frac{b}{a}\right)\right),$$

$$\mathtt{T}^{k+}_{a,b}(x) = \frac{a^k}{2}\left(E_k\left(\frac{b}{a}\right) + E_k\left(x+\frac{b}{a}\right)\right),$$

$$\mathtt{T}^{k-}_{a,b}(x) = \frac{a^k}{2}\left(E_k\left(\frac{b}{a}\right) - E_k\left(x+\frac{b}{a}\right)\right).$$

Általánosítások a $b, a+b, \ldots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

B., Kreso, Luca és Pintér (2012): A $2 \leq k < \ell$, és $\gcd(a,b) = \gcd(c,d) = 1$ feltételek mellett az

$$S^{k}_{a,b}(x) = S^{\ell}_{c,d}(y) \tag{9}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van. (ineffektív)

+ Effektív végesség, ha $k \in \{1,3\}$ és $\ell \notin \{1,3,5\}$.

(**BBKPT** (2002) említett eredményeinek általánosítása.)

Általánosítások a $b, a+b, \dots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

B. (2015): A fenti jelölésekkel,
tetszőleges $k>3$ és legalább harmadfokú $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén azon $k, g(x)$ párok megadása, amelyeken kívül az

$$S_{a,b}^{k}(x) = g(y) \tag{10}$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van. (ineffektív)
(**Rakaczki** (2004), és **Kulkarni és Sury** (2007) eredményének általánosítása)

Általánosítások a $b, a+b, \dots, a(n-1)+b$ számtani sorozat hatványösszegeire

B. (2015): A fenti jelölésekkel,
tetszőleges $k > 3$ és legalább harmadfokú $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén azon $k, g(x)$ párok megadása, amelyeken kívül az

$$\mathrm{S}_{a,b}^{k}(x) = g(y) \tag{10}$$

egyenletnek csak véges sok megoldása van. (ineffektív)
(**Rakaczki** (2004), és **Kulkarni és Sury** (2007) eredményének általánosítása)
tetszőleges $k \geq 7$ és legalább harmadfokú $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetén azon $k, g(x)$ párok megadása, amelyeken kívül az

$$\mathrm{T}_{a,b}^{k+}(x) = g(y) \tag{11}$$

és

$$\mathrm{T}_{a,b}^{k-}(x) = g(y), \tag{12}$$

egyenleteknek csak véges sok megoldásuk van. (ineffektív)
(**Kreso és Rakaczki** (2013) eredményének általánosítása)

Legyenek a, b, k és $\ell \geq 2$ olyan egészek, melyre $a \neq 0, \gcd(a,b) = 1$.

Theorem (B., Kreso, Luca, Pintér és Rakaczki (202?))

Tekintsük az

$$S_{a,b}^{k}(x) = y^{\ell} \tag{13}$$

egyenletet $x, y > 1$ *és* $\ell \geq 2$ *egészekben. Ekkor, ha* $(k, a, b) \neq (1, 2, 1)$, *akkor* $\ell < C_1$ *ahol* C_1 *egy csak* k, a *és* b *értékétől függő effektív konstans. Továbbá, a*

$$(k, \ell, a, b) \in \{(1,2,a,0), (3,2,a,0), (3,2,2,1), (3,4,a,0), (5,2,a,0)\}$$

esetektől eltekintve létezik olyan C_2, *csak* k, a *és* b *értékétől függő effektív konstans, hogy* $\max(|x|, |y|) < C_2$.

(**Győry, Tijdeman és Voorhoeve** (1980) általánosítása)

Új eredmények - eltolt hatványértékek

Legyen továbbá $c, d \in \mathbb{Q}$ és $c \neq 0$.

Theorem (B. (202?))

Ha $k \geq 2$, $k \notin \{3, 5\}$, akkor az

$$S_{a,b}^{k}(x) = cy^{\ell} + d, \tag{14}$$

egyenlet minden $x, y > 1, \ell$ egész megoldására létezik olyan C_3, csak a, b, c, d és k értékétől függő effektív konstans, hogy $\max(|x|, |y|, \ell) < C_3$.

Analóg eredmények az alternáló esetre:

Theorem (B. (202?))

A fenti jelölésekkel tekintsük a

$$T_{a,b}^{k+}(x) = cy^{\ell} + d \qquad (15)$$

és

$$T_{a,b}^{k-}(x) = cy^{\ell} + d, \qquad (16)$$

egyenleteket $x, y > 1$ *és* $\ell \geq 2$ *egészekben. Ekkor, ha* $k \geq 7$*, akkor létezik olyan, csak* a, b, c, d *és* k *értékétől függő effektív* C_4 *konstans, hogy* $\max(|x|, |y|, \ell) < C_4$ *az* (15) *és* (16) *egyenletek minden egész megoldására.*

Tekintsük újra az

$$\mathtt{S}_{a,b}^{k}(x) = g(y), \tag{10}$$

$$\mathtt{T}_{a,b}^{k+}(x) = g(y), \tag{11}$$

és

$$\mathtt{T}_{a,b}^{k-}(x) = g(y), \tag{12}$$

egyenleteket.

Új eredmények - másodfokú polinomértékek

Tekintsük újra az

$$\mathtt{S}_{a,b}^{k}(x) = g(y), \tag{10}$$

$$\mathtt{T}_{a,b}^{k+}(x) = g(y), \tag{11}$$

és

$$\mathtt{T}_{a,b}^{k-}(x) = g(y), \tag{12}$$

egyenleteket.

Tetszőleges másodfokú $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinom esetére sikerült effektív módon kiterjeszteni a **B.** (2015) ineffektív eredményeit.

Új eredmények - másodfokú polinomértékek

Theorem (B. (202?))

A korábbi jelölésekkel, legyen $k \geq 2$, $k \notin \{3, 5\}$, és $\deg g = 2$. Ekkor az

$$S^k_{a,b}(x) = g(y), \tag{10}$$

egyenlet minden x, y megoldására létezik olyan C_5, csak a, b, k és g értékétől függő effektív konstans, hogy $\max(|x|, |y|) < C_5$.

Új eredmények - másodfokú polinomértékek

Theorem (B. (202?))

A korábbi jelölésekkel, legyen $k \geq 2$, $k \notin \{3, 5\}$, és $\deg g = 2$. Ekkor az

$$S_{a,b}^{k}(x) = g(y), \tag{10}$$

egyenlet minden x, y megoldására létezik olyan C_5, csak a, b, k és g értékétől függő effektív konstans, hogy $\max(|x|, |y|) < C_5$.

Theorem (B. (202?))

A korábbi jelölésekkel, legyen $k \geq 7$, és $\deg g = 2$. Ekkor a

$$T_{a,b}^{k+}(x) = g(y), \quad \text{és} \quad T_{a,b}^{k+}(x) = g(y)$$

egyenletek minden x, y megoldására létezik olyan C_6, csak a, b, k és g értékétől függő effektív konstans, hogy $\max(|x|, |y|) < C_6$.

Új eredmények - további polinomértékek

Egy c differenciájú számtani sorozat ℓ egymást követő elemének szorzataként adódó

$$R_c^\ell(x) = y(y+c)(y+2c)\dots(y+(\ell-1)c) \tag{17}$$

polinom esetén az alábbi ineffektív végességi eredményt nyertük.

Theorem (B., Kreso, Luca, Pintér és Rakaczki (202?))

Legyenek a korábbi jelölések mellett k,ℓ olyan egészek, melyre $k \geq 2, k \notin \{3,5\}$ és $\ell = 3$ vagy $\ell \geq 5$. Ekkor az

$$S_{a,b}^k(x) = R_c^\ell(y) \tag{18}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van.

Új eredmények - további polinomértékek

Egy c differenciájú számtani sorozat ℓ egymást követő elemének szorzataként adódó

$$R_c^\ell(x) = y(y+c)(y+2c)\dots(y+(\ell-1)c) \tag{17}$$

polinom esetén az alábbi ineffektív végességi eredményt nyertük.

Theorem (B., Kreso, Luca, Pintér és Rakaczki (202?))

Legyenek a korábbi jelölések mellett k, ℓ olyan egészek, melyre $k \geq 2$, $k \notin \{3,5\}$ és $\ell = 3$ vagy $\ell \geq 5$. Ekkor az

$$S_{a,b}^k(x) = R_c^\ell(y) \tag{18}$$

egyenletnek csak véges sok x, y egész megoldása van.

Kis k vagy kis ℓ értékek esetén effektív végességet is nyertünk (18) megoldásaira.

Az ineffektív eredmények bizonyításában egyebek mellett a **Bilu-Tichy tétel**t (2000), és az $\mathtt{S}_{a,b}^{k}(x)$ valamint a $\mathtt{T}_{a,b}^{k+}(x)$ és $\mathtt{T}_{a,b}^{k-}(x)$ polinomok felbonthatóságát leíró eredményeinket használtuk (**B., Pintér, Srivastava** (2012); **B.** (2013)).

Új eredmények - a bizonyításokról

Az ineffektív eredmények bizonyításában egyebek mellett a **Bilu-Tichy tétel**t (2000), és az $\mathtt{S}^{k}_{a,b}(x)$ valamint a $\mathtt{T}^{k+}_{a,b}(x)$ és $\mathtt{T}^{k-}_{a,b}(x)$ polinomok felbonthatóságát leíró eredményeinket használtuk (**B., Pintér, Srivastava** (2012); **B.** (2013)).

Az effektív eredmények bizonyításának fő eszközei **Brindza** (1986), és **Schinzel és Tijdeman** (1976) effektív tételei, valamint **Pintér és Rakaczki** (2007), és **Rakaczki** (2011) tételei az eltolt Bernoulli-, ill. Euler polinomok gyökszerkezetéről.

Köszönöm a figyelmet.